

MATHEMATIQUES (COURS 7 EME ANNEE)

I- Nombres naturels :

\mathbb{N} : est l'ensemble des entiers (ou nombres) naturels.

$$\mathbb{N} = \{0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9 \}$$

\mathbb{Z}^* : est l'ensemble des entiers relatifs privé de 0.

$$\mathbb{Z} = \{ \dots ; -2 ; -1 ; 0 ; +1 ; +2 ; +3 ; \dots \}$$

$$\mathbb{Z}_+ = \{0 ; 1 ; 2 ; 3 ; \dots \} \text{ donc } \mathbb{Z}_+ = \mathbb{N}$$

$$\mathbb{Z}_- = \{0 ; -1 ; -2 ; -3 ; \dots \} \quad \mathbb{Z} = \mathbb{Z}_+ \cup \mathbb{Z}_-$$

EXERCICES :

1- Ecris en toutes lettres les nombres suivants :

170 045 ; 820 ; 90 345 678 ; 2 002 002 002 ; 47 001 001 001.

2- Ecris en chiffres les nombres suivants :

- Quarante-mille douze
- Sept milliards treize
- Soixante millions mille deux
- Dix-mille deux cent huit
- Huit millions huit-mille huit

\mathbb{D} : est l'ensemble des décimaux relatifs.

Un décimal est un nombre qui peut s'écrire sous la forme

$$\frac{a}{10^n} ; \mathbf{a} \in \mathbb{Z} \text{ et } \mathbf{n} \in \mathbb{N} \text{ (ou de la forme } a \cdot 10^p ; a \in \mathbb{Z} \text{ et } p \in \mathbb{Z}.)$$

Exemple : 2,5 et $\frac{3}{4}$ sont des décimaux ca

$$2,5 = \frac{25}{10} = \frac{25}{10^1};$$
$$\frac{3}{4} = 0,75 = \frac{75}{100} = \frac{75}{10^2}$$

\mathbb{Q} : est l'ensemble des nombres rationnels.

Un nombre rationnel est un nombre qui peut s'écrire sous la forme

$$\frac{a}{b} \text{ avec } b \neq 0, a \in \mathbb{Z} \text{ et } b \in \mathbb{Z}$$

Exemple : $\frac{1}{3}, \frac{3}{4}$ et $\frac{1}{7}$

a- Nombres opposés :

Deux nombres **a** et **b** sont opposés lorsque
 $a = -b$ ou $b = -a$ ou $a + (-b) = 0$

Exemple : 2 et -2 sont opposés

b- Nombres inverses :

Deux nombres **a** et **b** sont inverses l'un de l'autre lorsque

$$ab = 1 \text{ ou } a = \frac{1}{b} \text{ ou } b = \frac{1}{a}$$

Exemple : $\frac{7}{9}$ et $\frac{9}{7}$ sont inverses de même que -5 et $-\frac{1}{5}$

EXERCICES :

a-

- Quel est le nombre de dizaines dans 893 ?
- Quel est le chiffre des dizaines ?

b-

- Quel est le nombre de centaines dans 90 082 ?
- Quel est le chiffre des centaines ?

c-

- Quel est le nombre d'unités de mille dans 20 108 ?
- Quel est le chiffre des unités de mille ?

d- Construis le tableau.

Centaines de millions	Dizaines de millions	Unités de millions	Centaines de mille	Dizaines de mille	Unités de mille	Centaines	Dizaines	Unités simples
			3	0	0	0	4	8

Place chaque chiffre des nombres suivants dans la case qui convient :

300 048 ; 2 783 627 ; 57 621 ; 629 ; cent vingt-sept millions trois cent dix-neuf mille cinq cent dix.

II- Expression numérique :

1- Généralité :

Les expressions A , B , C et D suivantes sont des expressions numériques :

$$A = (9 - 3) \times 2 + 1$$

$$B = 9 - 3 \times 2 + 1$$

$$C = 9 - (3 \times 2 + 1)$$

$$D = 9 - 3 \times (2 + 1)$$

Bien qu'elles comportent toutes les mêmes nombres et les mêmes symboles d'opérations, elles ne se calculent pas de la même façon et on doit obtenir pour chacune un résultat différent ($A = 13$; $B = 4$; $C = 2$; $D = 0$).

Quelles sont les règles de calcul de telles expressions ?

2- Priorités opératoires :

Pour calculer une expression numérique sans parenthèses, on effectue les calculs de la gauche vers la droite, **en commençant par les multiplications et les divisions** qui ont priorité sur les additions et les soustractions.

Remarque :

S'il n'y a que des additions et des soustractions (ou que des multiplications et des divisions), on effectue les calculs de la gauche vers la droite.

Exemple 1 :

$$B = 9 - 3 \times 2 + 1.$$

On effectue d'abord la multiplication, qui est prioritaire par rapport à l'addition et à la soustraction :

$$B = 9 - 6 + 1.$$

On effectue ensuite la soustraction et l'addition, de gauche à droite : $B = 3 + 1 = 4$.

- Calcul avec parenthèses :

S'il y a des parenthèses, on **commence par effectuer les calculs à l'intérieur des parenthèses** les plus intérieures. On effectue ces calculs en respectant les priorités définies au **paragraphe I**.

Exemple 2 :

$$C = 9 - (3 \times 2 + 1).$$

On commence par calculer $3 \times 2 + 1$ qui est entre parenthèses. Pour cela, on effectue d'abord la multiplication qui est prioritaire : $C = 9 - (6 + 1)$.

On achève le calcul à l'intérieur des parenthèses : $C = 9 - 7 = 2$.

Exemple 3 : $G = 3 + \frac{6 + 4}{7 - 2}$.

Cette expression peut être écrite sous la forme suivante :

$$G = 3 + (6 + 4) \div (7 - 2).$$

On commence donc par effectuer $6 + 4$ et $7 - 2$: $G = 3 + 10 \div 5$.

On effectue ensuite la division, qui a priorité sur l'addition : $G = 3 + 2 = 5$.

3- Ecriture :

Au marché, on achète **trois salades** à **0,85 €** la pièce et **deux choux-fleurs** à **1,95 €** la pièce.

Si l'on donne **10 €** pour payer, **quelle sera la monnaie rendue ?**

Voici une solution détaillée donnée par un élève :

Calculs	Opérations
Prix des trois salades : 2,55 €	$0,85 \times 3 = 2,55$
Prix des deux choux-fleurs : 3,90 €	$1,95 \times 2 = 3,9$
Total à payer : 6,45 €	$2,55 + 3,9 = 6,45$
Monnaie rendue : 3,55 €	$10 - 6,45 = 3,55$

Peut-on écrire une expression numérique résumant tous les calculs effectués ci-dessus ?

Exemple 1 :

Reprenons l'exemple ci-dessus. Le total à payer se calcule en effectuant $2,55 + 3,9$ ou encore $0,85 \times 3 + 1,95 \times 2$ (en respectant les règles de priorité pour effectuer les opérations).

La monnaie est la différence entre **10 euros** et le prix total à payer ; elle correspond donc à l'expression : $10 - (0,85 \times 3 + 1,95 \times 2)$.

Cette expression résume les calculs effectués pas à pas dans l'introduction.

Exemple 2 :

Calcul d'une aire. On veut écrire une expression permettant de calculer l'aire de la cour.

La cour est rectangulaire. Ses dimensions (en mètres) sont :

en longueur : $14 - 5$;

en largeur : $10 - 6$.

L'aire de la cour (en mètres carrés) est donc égale à : $(14 - 5) \times (10 - 6)$.

Cette expression résume les étapes de calcul et permet de calculer l'aire de la cour (égale à 36 m^2).

4- Calcul :

À l'aide d'une calculatrice, on veut calculer l'expression numérique : $2 + 3 \times 4$. Si on tape la séquence : $2 + 3 \times 4 =$, il s'affichera **20** ou **14** selon le modèle utilisé.

Pourquoi cette différence ?

Si le résultat est **20**, la calculatrice est « **ordinaire** », c'est-à-dire qu'elle calcule dans l'ordre où l'on tape. Sur l'**exemple**, elle aura d'abord effectué $2 + 3 = 5$, puis $5 \times 4 = 20$.

Si le résultat est **14**, la calculatrice est « **scientifique** », c'est-à-dire qu'elle calcule en respectant les règles de priorité. Sur l'**exemple**, elle aura d'abord effectué $3 \times 4 = 12$, puis $2 + 12 = 14$.

a- Les expressions sans quotient :

- Avec calculatrice ordinaire :

Reprenons l'expression $2 + 3 \times 4$. On sait que les calculs doivent être effectués en commençant par la multiplication. Avec une calculatrice ordinaire, on tapera donc la séquence suivante :

$$3 \times 4 + 2 =$$

S'il y a **une paire de parenthèses**, on commencera par taper une séquence permettant de calculer l'expression entre parenthèses. Par exemple, pour calculer l'expression $2 \times (3 + 4)$, on tapera la séquence suivante :

$$3 + 4 \times 2 =$$

S'il y a **des parenthèses à l'intérieur d'autres parenthèses**, on commencera par taper une séquence correspondant aux parenthèses les plus intérieures. Par exemple, pour calculer l'expression $2 + (5 \times (4 - 2))$, on tapera la séquence suivante :

$$4 - 2 \times 5 + 2 =$$

- **Avec une calculatrice scientifique :**

Avec une calculatrice scientifique, il suffit de taper l'expression telle qu'elle apparaît (en la lisant de gauche à droite).

Exemple : pour calculer l'expression $2 \times (6 - (7 - 3 \times 2))$, on tapera la séquence :
 $2(6 - (7 - 3 \times 2)) =$

b- Les expressions avec quotient :

On considère ici que l'on utilise une **calculatrice scientifique**.

Lorsqu'une expression numérique contient un quotient écrit avec une barre de fraction, il faut regarder si le numérateur ou le dénominateur contiennent des opérations à effectuer.

Dans ce cas, on peut écrire l'expression en remplaçant la barre de fraction par le symbole de la division ; le numérateur et le dénominateur doivent alors être écrits entre parenthèses.

Exemple 1 : on veut calculer $A = 3 + \frac{6 + 4}{7 - 2}$.

On peut écrire cette expression sous la forme : $A = 3 + (6 + 4) \div (7 - 2)$.

On tapera donc la séquence suivante : $3 + (6 + 4) \div (7 - 2) =$

On doit obtenir 5.

Exemple 2 : on veut calculer $B = 7 - \frac{9}{\frac{1 + 4}{2 + 3}}$.

On peut d'abord écrire cette expression sous la forme : $B = 7 - 9 \div \frac{(1 + 4)}{(2 + 3)}$

Puis sous la forme : $B = 7 - 9 \div [1 + 4 \div (2 + 3)]$.

On tapera donc la séquence suivante : $7 - 9 \div (1 + 4 \div (2 + 3)) =$ On doit obtenir -2

III- Comparaison des nombres naturels :

Les nombres relatifs écrits sous cet axe sont les **abscisses** des points marqués sur la droite.

Par exemple, le point **B** a pour abscisse **-4** ; le nombre **+3** est l'abscisse du point **A**.

Sur cet axe, on considère qu'il y a un **sens de parcours** : de la gauche vers la droite ; ce sens est symbolisé par la flèche. Grâce à ce sens de parcours, on peut dire **par exemple** que **B** est **avant** le point **A**, ce que l'on traduit par **-4** est **inférieur** à **+3** et que l'on note : **-4 < +3**.

De même, **B** est avant **D**, et donc : **-4 < -2**.

1- Définition :

Soient **A** et **B** deux points d'un axe, d'abscisses respectives **a** et **b**. Dire que **a** est inférieur à **b** signifie que **A** est avant **B**. On note : **a < b**.

• Application :

Soient **a** et **b** deux nombres différents de **0**. Si **a** est négatif et si **b** est positif, alors **a < b**.

Exemples : **-25 < +34** ; **-0,02 < +3,8**.

Soient **a** et **b** deux nombres. Si **a < b**, alors **-b < -a**.

Exemples : **12 < 28**, c'est-à-dire **+12 < +28**, donc : **-28 < -12** ;
0,18 < 0,2 donc : **-0,2 < -0,18**.

- Dans l'ordre croissant :

On veut ranger ces Dans l'ordre croissant signifie du plus petit au plus grand.

Considérons les nombres : **-4** ; **0** ; **+7** ; **-12** ; **+3** ; **-9** ; **+8**.

nombres dans l'ordre croissant.

On cherche le plus petit nombre. C'est **-12** car : **-12 < -4** et **-12 < 0** et **-12 < +7**, etc.

On barre **-12** de la liste : **-4** ; **0** ; **+7** ; **-12** ; **+3** ; **-9** ; **+8**.

On cherche le plus petit nombre parmi ceux qui restent. C'est **-9**.

On barre **-9** de la liste : **-4 ; 0 ; +7 ; -12 ; +3 ; -9 ; +8**.

Et ainsi de suite.

On obtient successivement : **-12 ; -9 ; -4 ; 0 ; +3 ; +7 ; +8**.

Ainsi écrits, ces nombres sont rangés dans l'ordre croissant.

On peut aussi écrire : **-12 < -9 < -4 < 0 < +3 < +7 < +8**.

Remarque :

On peut aussi commencer par séparer les nombres à ranger en **deux** groupes : les nombres strictement négatifs : **-4, -12, -9**, et les nombres positifs : **0, +7, +3, +8** ; on ordonne d'abord les nombres négatifs : **-12 < -9 < -4**, puis les positifs : **0 < +3 < +7 < +8**.

On en déduit que : **-12 < -9 < -4 < 0 < +3 < +7 < +8**.

- Dans l'ordre décroissant :

Dans l'ordre décroissant signifie du plus grand au plus petit.

Reprenons l'**exemple** précédent. On veut ranger ces nombres dans l'ordre décroissant.

Si l'on connaît la liste des nombres dans l'ordre croissant, il suffit d'écrire cette **liste à l'envers**, ce qui donne : **+8 ; +7 ; +3 ; 0 ; -4 ; -9 ; -12** ; ou encore : **+8 > +7 > +3 > 0 > -4 > -9 > -12**.

Si l'on ne connaît pas la liste des nombres dans l'ordre croissant, on procède comme dans le paragraphe précédent : on commence par chercher le plus grand nombre (**+8**) ; on le barre de la liste ; on cherche le plus grand nombre parmi ceux qui restent (**+7**) ; etc.

IV- Droites :

1- Définition :

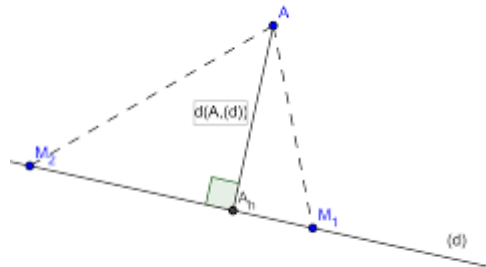
Dans un plan euclidien, les droites sont des ensembles de points dont les coordonnées cartésiennes satisfont une équation du type : $ax + by + c = 0$, (a, b non simultanément nuls) qui, si $b \neq 0$, peut s'écrire sous la formule réduite $y = mx + n$ où m est le **coefficient angulaire** (ou **pende**), n l'**ordonnée à l'origine**.

Si $abc \neq 0$, on peut mettre l'équation sous la forme $x/p + y/q = 1$ où $(p, 0)$ et $(0, q)$ sont les points communs à la droite et aux axes de coordonnées.

On appelle **droite projective** l'**espace projectif** de dimension 1. Dans le plan projectif, on dit que **deux** droites parallèles ont le même point à l'infini. L'ensemble de tous les points à l'infini des droites du plan constitue la **droite de l'infini** qui, en coordonnées cartésiennes homogènes, a pour équation $x_0 = 0$.

Dans l'espace euclidien de dimension 3, une droite non parallèle aux axes peut être représentée par une équation de type :

$$(x-a_1)/m = (y-a_2)/n = (z-a_3)/p.$$



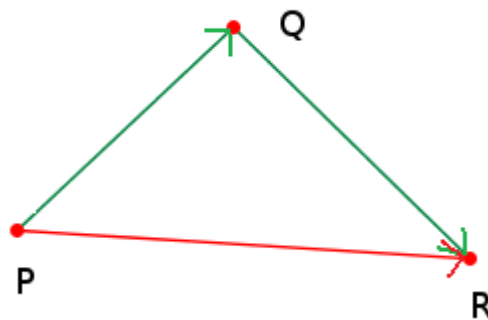
Si le repère est **orthonormé**, les nombres m, n, p sont proportionnels aux **cosinus** directeurs de la droite, c'est-à-dire aux cosinus des **angles** qu'elle forme avec les axes de coordonnées. Deux droites peuvent être **coplanaires** (appartenant à un même plan) ou non coplanaires (non contenues dans un même plan).

Par rapport à un plan, une droite peut être **parallèle** (elle n'a aucun point en commun), **sécante** (elle a un seul point en commun) ou bien est dans le plan. Ensemble des **points équipotents** à \mathbb{R} . A l'aide d'une **bijection** g , appelée parfois **graduation** de la droite D dans \mathbb{R} , on peut ordonner D qui devient une droite orientée.

Si M est un point de D , $x_M = g(M)$ est dite l'**abscisse** de M relativement à la graduation G ; le point d'abscisse 0 est l'origine de la graduation. On le désigne souvent par la lettre O .

En algèbre, dans un espace vectoriel réel, une **droite vectorielle** est un sous-espace vectoriel de dimension 1. Autrement dit, une droite vectorielle est un ensemble de **points** de type $x = tv$ où v est **vecteur** donné et t un

nombre réel arbitraire.



Dans un espace affine E , l'ensemble des points de type $x = a + tv$ où a est un point donné, v un vecteur donné de l'espace vectoriel associé à E et t un nombre réel arbitraire est une droite affine ; on dit que la droite passe par le point a et admet v pour **vecteur directeur**.

L'équation $x = a + tv$ est dite **équation paramétrique** de la droite. Pour tout couple (a, b) de points de E il passe une droite affine et une seule ($a \neq b$) ; son équation est $x = a + t(b-a)$. Si on transporte l'ordre naturel des nombres réels sur l'ensemble des points de la droite par la bijection $t \rightarrow a + tv$ (resp. $t \rightarrow a + t(b-a)$), on obtient une orientation de la droite : on dit que la droite est orientée par le vecteur v (resp de a vers b).

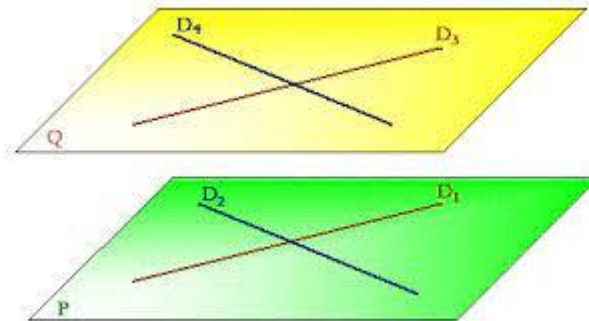
L'ensemble des points qui sont précédés par (resp qui précèdent) un point donné sur la droite est appelé **demi-droite positive** (resp négative) ayant ce point pour origine.

L'**ensemble des réels** est lui-même une droite appelée la **droite numérique**. Deux droites sont dites **sécantes** si elles ont un point commun, parallèles si elles sont des vecteurs directeurs colinéaires.

On peut étendre la notion de droite aux espaces complexes, qu'ils soient vectoriels, affines ou projectifs.

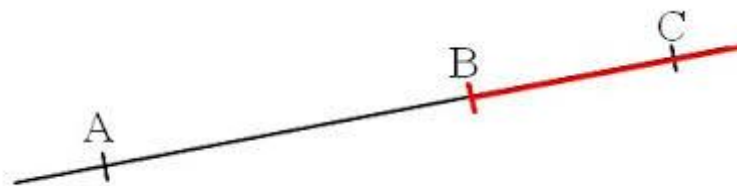
2- Représentation graphique :

Pour se représenter une droite, on peut imaginer une corde tendue sur un mur ou un rayon de lumière. Une droite est une **ligne continue** dans une direction fixée, sans sauts ou interruptions, **sans début ni fin, formée par la succession d'une infinité de points alignés.**



Pour désigner une droite, on utilise généralement la lettre majuscule **D** (ou minuscule **d**), à laquelle on ajoute un numéro en indice (D_1 , D_2 , etc.) ou des accents en exposant (D' , D'' , etc.). Lorsqu'il y en a plusieurs. Une droite **D** est généralement notée entre parenthèses (**D**), pour éviter toute ambiguïté avec un éventuel point **D**. Par ailleurs, si une droite est définie par deux points **A** et **B**, la droite est notée (**AB**).

Si on choisit un point **P** sur une droite **D**, celle-ci est alors divisée en deux parties, ou **demi-droites**, que l'on va appeler D_1 et D_2 . **Une demi-droite a un début, mais pas de fin.** Ici, c'est le point **P** que l'on appelle l'**origine** des deux **demi-droites**.



En choisissant deux points **P** et **Q** sur une droite, on la divise en trois parties : les deux demi-droites D_1 et D_2 , et le segment **[PQ]**. Un segment est un tronçon de droite limité par deux points ; il est noté entre crochets : ainsi dans notre exemple, le segment formé par les points **P** et **Q** est noté **[PQ]**. **Un segment a donc un début et une fin.** Les points **P** et **Q** sont appelés les extrémités du segment. Le segment d'extrémités **P** et **Q** peut donc se noter de deux manières différentes : **[PQ]** et **[QP]**.

Si on fixe un point et si on trace des droites qui passent par ce point, on s'aperçoit que l'on peut en tracer autant que l'on veut : **par un point passent une infinité de droites.**

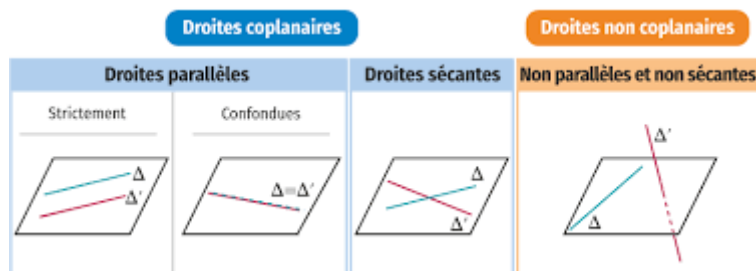
Si on fixe **deux** points et si on essaye de tracer des droites qui passent par ces deux points, on voit qu'il n'y en a qu'une seule de possible : **par deux points passe une et une seule droite.**

Si on fixe **trois** points non alignés et si on essaye de tracer une droite qui passe par ces trois points, on voit très vite que c'est impossible. En revanche, si les trois points sont alignés, il y a une droite, et une seule, qui les inclut tous.

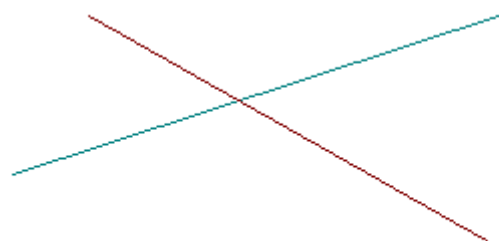
3- Position de deux droites sur un Plan :

Si on trace deux droites sur une feuille de papier, elles peuvent être :

- **parallèles**, si elles ne se croisent jamais, peu importe jusqu'où on les prolonge ; elles n'ont aucun point en commun. Deux droites parallèles ont la même direction ;

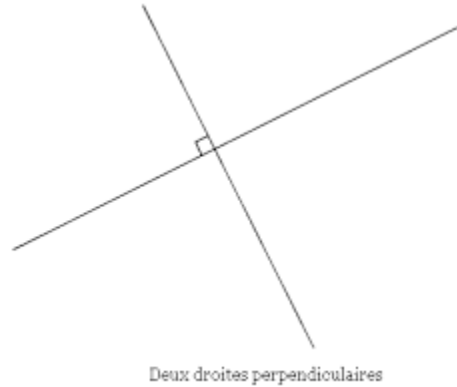


- **sécantes**, si elles se coupent à un endroit. Deux droites sécantes ont des directions différentes ;



Deux droites sécantes

- **perpendiculaires**, si en plus d'être sécantes, elles se coupent en formant quatre angles droits (à 90°). Deux droites perpendiculaires ont des directions différentes ;



- **confondues**, si en plus d'être parallèles, elles ont tous leurs points en commun ; il s'agit alors d'une seule et même droite.

Les **exemples** de droites parallèles sont nombreux : les **rails** de chemin de fer, les traces que laissent les pneus d'une voiture sur une route humide, les lignes d'une piste de l'épreuve du 100 m en **athlétisme**, etc.

L'**exemple classique** de droites sécantes, qui peuvent être perpendiculaires, est celui du carrefour de routes ou de rues dans une ville.

4- Droites parallèles et perpendiculaires :

Pour tracer des droites parallèles et perpendiculaires sur une feuille de papier, on utilise un outil nommé **équerre** ; il existe deux sortes d'équerre. La première sorte a une forme de triangle isocèle, ce qui veut dire que deux de ses côtés, ceux qui forment un angle droit, sont de même longueur. Ces deux côtés sont appelés les **cathètes** du triangle. La deuxième sorte d'équerre est un simple triangle rectangle : ses trois côtés ont tous des longueurs différentes, et deux de ses côtés (les cathètes) forment aussi un angle droit. Les équerres sont généralement faites de plastique transparent.

- Pour tracer une parallèle à une droite, on suit les étapes suivantes :

1- on aligne l'hypoténuse (côté le plus long, opposé à l'angle droit) de l'équerre isocèle avec la droite ;

2- on pose une règle (ou une autre équerre) le long d'une des cathètes de la première équerre ;

3- on fait glisser l'équerre isocèle le long de la règle (ou de l'autre équerre) jusqu'à arriver à la position où l'on veut tracer la droite parallèle.

- Pour tracer maintenant des droites perpendiculaires à celles d'avant, il suffit de suivre les étapes suivantes :

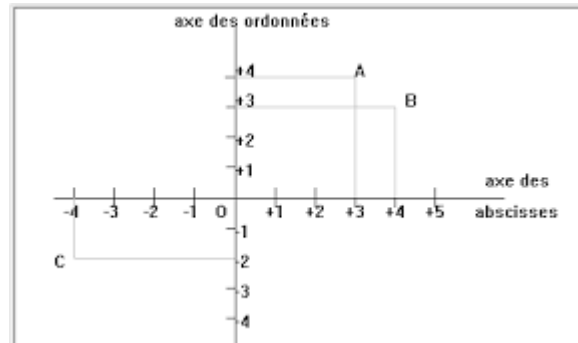
1. sans déplacer la règle (ou l'équerre de gauche), on enlève l'équerre isocèle ;
2. on tourne l'équerre isocèle de manière à ce que ce soit l'autre cathète qui soit posée là où était la première au début, le long de la règle ;
3. on glisse l'équerre isocèle le long de la règle (ou de l'autre équerre) jusqu'à ce que son hypoténuse arrive à l'endroit où l'on veut tracer la droite perpendiculaire.

Pour se représenter une droite, on peut imaginer une corde tendue sur un mur ou un rayon de lumière. Une droite est une **ligne continue** dans une direction fixée, sans sauts ou interruptions, **sans début ni fin, formée par la succession d'une infinité de points alignés**.

5- Abscisse et ordonnée :

Les **nombre relatifs** permettent de graduer complètement une **droite** (dans les **deux sens**, de part et d'autre du **zéro**).

Comment place-t-on sur une droite graduée un point d'abscisse donnée ?



a- Définition :

Un **axe** est une droite sur laquelle **un sens positif et un sens négatif** ont été définis et sur laquelle une **graduation régulière** a été tracée.

En général, le sens positif est le sens de parcours de la gauche vers la droite ou bien le sens de parcours du bas vers le haut (ces **deux** sens sont symbolisés par une flèche à l'extrémité de la droite).

Les traits de la graduation peuvent être espacés d'un écart quelconque, mais celui-ci doit être constant.

b- Abscisse :

L'**abscisse** (mot féminin) d'un point sur un axe est le nombre qui lui est associé ; ce nombre indique : le **nombre d'unités nécessaires** pour aller de l'origine au point considéré ; le sens dans lequel il faut se déplacer pour y aller.

Soit un axe sur lequel la graduation fait apparaître l'origine. Si l'on veut placer le point **A** d'abscisse **- 3**, il suffit de compter **trois** graduations vers la gauche en partant de **0** puisque, dans le cas présent, l'écart entre chaque graduation est égal à **1** (les traits de graduation correspondant aux nombres **0** et **1** permettent de l'affirmer).

Si l'on veut placer le point **B** d'abscisse **2,7**, la tâche est plus complexe puisqu'il faut partager le segment entre **2** et **3** en **dixièmes**.

Remarques :

Il est impossible de placer le point **C** d'abscisse **3,64** avec exactitude, car on ne peut pas percevoir les centièmes sur l'axe donné.

On peut simplement donner sa localisation approximative : entre les points d'abscisses **3,6** et **3,7** ; Il est impossible de placer le point d'abscisse **- 6**, car l'axe est trop court.

L'origine de l'axe n'est pas toujours visible sur la figure ; il est cependant parfois possible de placer un point d'abscisse donnée.

c- Ordonnée :

Un repère du plan est constitué de **deux** axes ayant la même origine, généralement **perpendiculaires**. L'axe « **horizontal** » est l'axe des abscisses et l'axe « **vertical** » est l'axe des **ordonnées**.

Les coordonnées d'un point sont **deux** nombres classés dans un ordre précis :

- le **premier** nombre s'appelle l'abscisse du point ;
- le **deuxième** nombre s'appelle l'ordonnée du point.

Comment placer un point dont on connaît les coordonnées dans un plan muni d'un repère ?

Exemple 1 :

On veut placer le point **A** de coordonnées **3** et **2**.
L'abscisse de **A** est égale à **3** et son ordonnée est égale à **3**.

Première étape : on repère 3 sur l'axe des abscisses et 2 sur l'axe des ordonnées.

Deuxième étape : on trace des droites parallèles aux axes passant par les traits de graduation correspondant à 3 et à 2. À l'intersection de ces droites se trouve le point A.

Exemple 2 :

On veut placer le point B de coordonnées -4 et -3.

L'abscisse de B est égale à -4 et son ordonnée est égale à -3.

Remarques :

Si un point a une abscisse égale à 0, alors ce point est sur l'axe des ordonnées.

Si un point a une ordonnée égale à 0, alors ce point est sur l'axe des abscisses.

On peut aussi placer des points dont les coordonnées ne sont pas des entiers.

V- Addition et Soustraction dans IN :

Aujourd'hui, il fait -5 degrés Celsius dehors. Quand Sophie rentre chez elle, elle constate sur le thermomètre qu'il fait 24 degrés de plus à l'intérieur, soit $(-5) + (+24) = 19$ degrés.

Lorsque l'on additionne ou soustrait des nombres relatifs, **comment prend-on en compte leur signe ?**

A- Addition :

- **Définition :**

Opération de l'**arithmétique**, représentée par le **signe + n** (plus), qui peut être définie à partir des **axiomes de Peano** relatifs aux **nombres naturels**. On raisonne par récurrence.

- **Les deux nombres sont de même signe :**

• **Règles de calcul :**

La somme de deux nombres positifs est positive ;
la somme de deux nombres négatifs est négative ;
la distance à zéro de la somme de deux nombres de même signe est la somme des distances à zéro de ces nombres.

Exemples :

$(+7) + (+2) = +9$. En effet, $(+7)$ et $(+2)$ étant positifs, le résultat est positif. On obtient 9 en effectuant $7 + 2$.

$(-4) + (-6) = -10$. En effet (-4) et (-6) étant négatifs, le résultat est négatif. On obtient 10 en effectuant $4 + 6$.

- **Les deux nombres sont de signes différents :**

• **Règles de calcul :**

Le signe de la somme de deux nombres de signes différents est le signe du nombre qui a la plus grande distance à zéro ;
la distance à zéro de la somme de deux nombres de signes différents est la différence des distances à zéro de ces nombres (la plus grande moins la plus petite).

Cas particulier : la somme de deux nombres opposés est égale à 0. Par exemple, $(-7) + (+7) = 0$.

Exemples :

$(+9) + (-4) = +5$. En effet, des nombres $(+9)$ et (-4) , c'est $(+9)$ qui a la plus grande distance à zéro et qui donne son signe + au résultat. On obtient 5 en effectuant $9 - 4$.

$(+2) + (-8) = -6$. En effet, dans ce deuxième exemple, c'est (-8) qui a la plus grande distance à zéro et qui donne son signe « - » au résultat. On obtient 6 en effectuant $8 - 2$.

EXERCICE :

Calcule en respectant les programmes donnés :

$$(4 + 19) + (13 + 23)$$

$$4 + (19 + 13) + 23$$

$$7 + (15 + 8) + 8 + (19 + 5)$$

$$(7 + 15) + (8 + 19) + 5$$

Quelle égalité obtiens-tu ?

B- Soustraction :

- Règle de calcul :

Soustraire un nombre revient à additionner son opposé.

Exemples :

Pour soustraire (+5), on additionne (-5).

Ainsi : $(-4) - (+5) = (-4) + (-5)$; on calcule ensuite selon les règles du paragraphe 1 ; donc : $(-4) - (+5) = (-4) + (-5) = -9$.

Pour soustraire (-3), on additionne (+3).

Ainsi : $(-8) - (-3) = (-8) + (+3) = -5$.

VI- Multiplication dans IN :

- Définition :

Opération (ou **loi de composition**) de l'**arithmétique** notée \cdot (ou **x**), ou en omettant le **signe** et en écrivant les termes à multiplier l'un près de l'autre.

Pour les **entiers naturels**, elle peut être définie à partir des **axiomes** de **Peano** et de l'opération d'**addition** en utilisant un raisonnement par récurrence : pour tout entier n , $n \cdot 1$ est égal à n ; si $m + 1$ désigne le successeur de l'entier m ,

$$n \cdot (m + 1) = (m + 1) \cdot n = n \cdot m + n.$$

EXERCICE :

1- Calcule mentalement 79×9 on peut procéder ainsi :

$$\begin{aligned}(80 - 1) \times 9 &= 80 \times 9 - 1 \times 9 \\ &= 720 - 9 \\ &= 711\end{aligned}$$

2- Calcule mentalement :

35×7

39×8

45×6

22×14

39×75

9×25

13×5

77×66

VII- Division dans \mathbb{IN} :

- **Définition :**

Opération inverse de la **multiplication**. Si l'**ensemble** considéré est un corps commutatif, comme **par exemple**, les **nombre rationnels** ou les **nombre réels**, étant donné **deux** éléments **a** (le **dividende**) et **b** (le **diviseur**), ce dernier différent de **zéro**, il existe toujours un élément **x** unique tel **a = bx**.

EXERCICE :

Le quotient d'une division est **7**, le diviseur est **9**.

Quel est l'ensemble des dividendes possibles ?

Soit tu utilises **(2')** et alors tu sais que le dividende a est tel que :

$$9 \times 7 \leq a \text{ et } a < 9 \times (7 + 1)$$

Ou encore $63 \leq a \text{ et } a < 72$.

Ce qui te donne les réponses.

Soit tu utilises (1') et tu sais que : $a = 9 \times 7 + r \text{ et } r < 9$

$$a = 63 + r \text{ et } r < 9.$$

VIII- Éléments de géométrie dans l'espace :

1- Définitions :

Partie de la **géométrie** qui étudie les **méthodes** permettant de représenter sur un **plan** les objets de l'espace (**étendue, forme, position réciproque**).

Le terme « **espace** » est susceptible de prendre des significations plus générales. Dans un sens large, un ensemble d'éléments, qu'on appellera encore **points**, prend le nom d'espace dès qu'on a introduit un système de postulats qui en caractérisent la structure même : **fonctions, matrices**, etc.

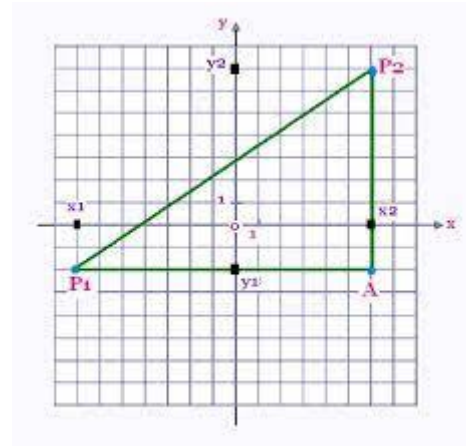
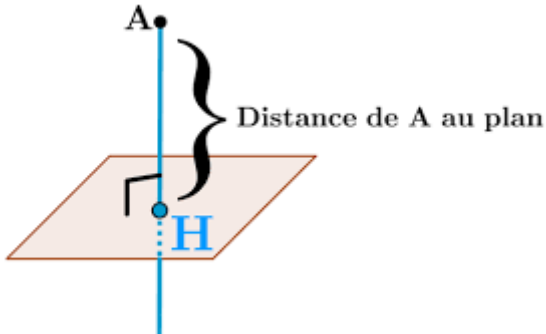
2- Méthode :

Les principales méthodes sont les suivantes : **projection orthogonales, projections cotées, projections stéréographiques**.

En pratique, il convient de considérer les trois méthodes séparément. Elles sont pourtant intimement liées, car fondées sur une série d'opérations caractéristiques de la géométrie élémentaire : **projections, sections, rabattements**.

Les méthodes de la géométrie descriptive permettent ainsi de résoudre les problèmes de représentation des **ombres**.

Dans la méthode des deux projections orthogonales, aussi appelée **méthode de Monge**, on fixe deux plans perpendiculaires entre eux (**plan horizontal de projection** et le **plan frontal de projection**), qui se coupent suivant une droite appelée **ligne de terre**.



IX- Puissance d'un nombre naturel :

Soit a un nombre non nul et n un entier naturel non nul. L'aire d'un carré de côté a est a^2 (on lit « a au carré », ou « a puissance 2 », ou « a exposant 2 »).

De même, le volume d'un cube d'arête a est a^3 (on lit « a au cube » ou « a puissance 3 » ou « a exposant 3 »).

Mais quel sens ont donc d'autres écritures telles que 7^5 , $(-2)^7$ ou 5^{-3} ?

1- Définition :

Si $n \geq 2$, alors a^n est le produit de n facteurs tous égaux à a : $a^n = a \times \dots \times a$

 a est écrit n fois

Si $n = 1$, alors $a^1 = a$.

De plus, $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

 a^n

Enfin, par convention, si $a \neq 0$ on pose $a^0 = 1$. Donc « 0^0 » n'est pas défini.

Vocabulaire :

- a^n et a^{-n} s'appellent des **puissances** de a .
- n (ou $-n$) s'appelle l'**exposant**.
- Pour a^n , on lit « a à la puissance n » ou « a exposant n ».

— 10^7 se lit « 10 à la puissance 7 », mais $\left(\frac{3}{7}\right)^5$ se lit « 3 sur 7, le tout à la puissance 5 ».

Exemples :

$$3^5 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$$

----- = 243.

3 est écrit 5 fois

$$(-2)^7 = (-2) \times (-2) \times (-2) \times (-2) \times (-2) \times (-2) \times (-2)$$

----- = 128.

-2 est écrit 7 fois

$$5^{-3} = \frac{1}{5^3} = \frac{1}{5 \times 5 \times 5} = \frac{1}{125} = 0,008.$$

Remarque:

Pour calculer, avec une calculatrice, une puissance d'un nombre, on utilise la touche y^x (ou x^y ou \wedge ou \uparrow). Ainsi, pour calculer $2,3^4$, on tape la séquence : 2, 3 y^x 4 =, ce qui donne : 27,984 1.

2- Propriétés :

a et b étant des nombres relatifs non nuls, n et p étant des entiers relatifs, on a :

$$a^n \times a^p = a^{n+p}; a^n$$

$$\frac{a^n}{a^p} = a^{n-p};$$

$$a^n \times b^n = (ab)^n; \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n};$$

$$(a^n)^p = a^{n \cdot p}.$$

Exemples:

$$3^4 \times 3^7 = 3^{4+7} = 3^{11} = 177\,147$$

$$\frac{-5^3}{-5^5} = (-5)^{3-5} = (-5)^{-2} = \frac{1}{(-5)^2} = \frac{1}{25} = 0,04.$$

$$2^6 \times 5^6 = (2 \times 5)^6 = 10^6 = 1\,000\,000$$

$$(4^2)^{-3} = 4^2 \times (-3) = 4^{-6} = \frac{1}{4^6} = \frac{1}{4\,096} = 0,000\,244.$$

EXERCICE :

Écrire un nombre sous forme d'une puissance

Considérons le nombre A égal à $3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$.
Il y a **6 facteurs** tous égaux à **3**, donc $A = 3^6$.

De même, si $B = \frac{1}{7} \times \frac{1}{7} \times \frac{1}{7} \times \frac{1}{7} \times \frac{1}{7}$, alors $B = \left(\frac{1}{7}\right)^5 = \frac{1}{7^5} = 7^{-5}$.

Enfin, si $C = (-3) \times (-3) \times (-3) \times (-3) \times 0,7 \times 0,7 \times 0,7 \times 0,7$, alors :
 $C = (-3)^4 \times 0,7^4$
 $C = ((-3) \times 0,7)^4$
 $C = (-2,1)^4$

Remarque : dans l'écriture de C , il y a **quatre facteurs négatifs** et par conséquent, le résultat est positif. On a donc également : $C = 2,1^4$.

Cette remarque se généralise. Soit a un nombre strictement négatif et n un entier relatif :

- si n est pair alors a^n est positif ;
- si n est impair alors a^n est négatif.

Utiliser des puissances de **10**

Voici une conséquence de la définition de la puissance d'un nombre non nul.
Soit n un entier strictement positif.

10^n s'écrit : **1** suivi de **n** chiffres **0**.

10^{-n} s'écrit : **0,.....1** avec **n** chiffres **0** au total (dont **n - 1 zéros** après la virgule).

Exemples :

$10^3 = 1\ 000$ (trois zéros) ; $10^6 = 1\ 000\ 000$ (six zéros).
 $10^{-2} = 0,01$ (deux zéros) ; $10^{-6} = 0,000\ 001$ (six zéros).

Bien sûr, $10^0 = 1$.

Ceci permet d'écrire les nombres décimaux en écriture scientifique.

Exemples :

$1\ 500\ 000 = 1,5 \times 1\ 000\ 000 = 1,5 \times 10^6$
 $0,000\ 000\ 054\ 7 = 5,47 \times 0,000\ 000\ 01 = 5,47 \times 10^{-8}$

3- Calcul :

On retrouve des puissances dans de très nombreuses formules de mathématiques ou de physique.

Par exemple, le volume d'une boule est donné par la formule $\frac{4}{3} \pi R^3$, où R désigne le rayon.

Comment utiliser la définition et les propriétés des puissances pour les calculer ?

- Utiliser la définition des puissances :

On veut calculer les nombres A, B, C, D, E, F, G, H et I suivants :

$$A = 1,1^3 = 1,1 \times 1,1 \times 1,1 = 1,331.$$

$B = (-0,2)^5 = (-0,2) \times (-0,2) \times (-0,2) \times (-0,2) \times (-0,2) = -0,000\ 32$, car le nombre $-0,2$ est négatif et l'exposant, 5, est impair.

$$C = \left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{2^4}{3^4} = \frac{16}{81}. \text{ On peut aussi écrire : } C = \left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{2^4}{3^4} = \frac{16}{81}.$$

$D = 1\ 789^0 = 1$, car tout nombre non nul élevé à la puissance 0 donne 1 (mais $0^{1\ 789} = 0$).

$$E = (-2\ 001)^1 = -2001.$$

$F = (-1)^{2\ 001} = -1$, car il y a un nombre impair de facteurs tous égaux à -1 .

$G = (-1)^{3\ 000} = 1$, car il y a un nombre pair de facteurs tous égaux à -1 .

$H = -2^8 = -128$. En effet, l'écriture -2^8 est équivalente à l'écriture $-(2^8)$.

- **Appliquer les propriétés des puissances :**

Dans ce paragraphe, a et b désignent des nombres non nuls, n et p des entiers relatifs.

On veut écrire sous la forme d'une puissance les nombres A , B , C , D et E suivants :

$$A = (-7)^3 \times 5^3 = (-7 \times 5)^3 = (-35)^3$$

On a utilisé la propriété : $a^n \times b^n = (ab)^n$.

$$B = (-0,7)^7 \times (-0,7)^4 = (-0,7)^{7+4} = (-0,7)^{11}$$

On a utilisé la propriété : $a^n \times a^p = a^{n+p}$.

$$C = 4^3 \times 4^{-9} = 4^{3-9} = 4^{-6}$$

On a ici aussi utilisé la propriété : $a^n \times a^p = a^{n+p}$. En effet, $3 + (-9) = 3 - 9 = -6$.

$$D = (2,3^5)^3 = 2,3^{5 \times 3} = 2,3^{15}$$

On a utilisé la propriété : $(a^n)^p = a^{np}$.

$$D = (2,3^5)^3 = 2,3^5 \times 3 = 2,3^{15}$$

On a utilisé la propriété : $(a^n)^p = a^{np}$.

$$4^2$$

$$E = \frac{4^2}{4^7} = 4^{2-7} = 4^{-5}$$

On a utilisé la propriété : a^n

$$\frac{---}{a^p} = a^{n-p}$$

Remarque : attention, il n'existe pas de formules concernant la somme des puissances !

Ainsi : $G = 3^2 + 5^2 = 9 + 25 = 34$ (alors que $3 + 5 = 8$ et $8^2 = 64$), car les puissances ont priorité sur les additions.

Les calculs de puissances ou de racines carrées peuvent être fastidieux si on ne dispose pas d'une calculatrice.

Comment les faire avec une calculatrice ?

- Utilisation de la machine :

La plupart des calculatrices possèdent une touche « carré » : x^2 .

Exemple : pour calculer l'aire d'un carré de côté 3,7 m, il suffit de saisir la séquence : $3,7 x^2$.

L'affichage indique : 13,69. L'aire de ce carré est donc 13,69 m².

Remarque : sur certaines calculatrices, il faut appuyer sur la touche **EXE** pour que le calcul soit exécuté.

- Calculer une puissance :

Pour calculer un cube (si la calculatrice ne possède pas la touche « cube » : x^3) ou une puissance quelconque, on peut utiliser la touche « puissance » dont le symbole sur le clavier de la calculatrice

est : Y^x ou X^y ou \wedge ou \uparrow .

Exemple 1 : on veut calculer le nombre $A = 57^3$.

On tape la séquence : $57 y^x 3 =$ (ou : $57 y^x 3 EXE$).

L'affichage indique : 185193

Remarque : suivant les modèles, c'est la touche $=$ ou la touche **EXE** qui donne l'ordre d'effectuer les calculs.

Exemple 2 : on veut calculer le nombre $B = (-2,4)^4$.

On tape la séquence : $2,4 +/- y^x 4 =$

L'affichage indique : 33,1776

On pouvait prévoir que le résultat serait positif, puisque l'exposant est pair, et ne pas utiliser la touche $+/-$.

Exemple 3 : on veut calculer le nombre $C = 0,4^{-7}$.

On tape la séquence : $0,4 y^x 7 +/- =$

L'affichage indique : **97,65625**

Exemple 4 : on veut calculer le nombre $D = 17^{23}$. On tape la séquence : **1 7 y^x 2 3 =**

L'affichage indique : **1,99675689²⁸**

Cet affichage signifie : **1,996 756 89 × 10²⁸**.

Remarque : lorsque le nombre est trop grand par rapport à l'écran d'affichage, la calculatrice passe automatiquement en mode scientifique. On constate que certaines décimales sont alors perdues (sauf sur des calculatrices très performantes travaillant en mode exact).

- Calculer une racine carrée :

La plupart des calculatrices possèdent une touche « racine carrée » : **√**.

Exemple 1 : on veut calculer le nombre $A = \sqrt{106929}$.

Suivant les calculatrices, on tape :

soit la séquence : **1 0 6 9 2 9 √ =**

soit la séquence : **√ 1 0 6 9 2 9** (ou : **√ 1 0 6 9 2 9 EXE**)

L'affichage indique : **327**

Exemple 2 : on veut calculer le nombre $B = \sqrt{47}$.

On tape la séquence : **4 7 √ =** (ou : **√ 4 7 =** ou bien : **√ 4 7 EXE**)

L'affichage indique : **6,8556546**

Remarque : il faut noter que le résultat affiché par la calculatrice n'est qu'une valeur approchée.

Exemple 3 : on veut calculer le nombre $C = \sqrt{189^2 + 340^2}$.

On tape la séquence : **(1 8 9 x² + 3 4 0 x²) √ =** ou : **(1 8 9 x² + 3 4 0 x²) =**

L'affichage indique : **389**

X- Caractères de divisibilité :

Qu'est-ce qu'un diviseur ?

1- Définition :

Un nombre naturel **b** est un diviseur d'un nombre naturel **a** lorsque la division de **a** par **b** admet pour reste **0**.

EXERCICES :

1- Effectue les divisions suivantes :

$117 \div 9 ;$

$182 \div 9 ;$

$196 \div 14 ;$

$191 \div 7 ;$

$1\ 281 \div 7 ;$

$235 \div 13.$

Les **critères de divisibilité** sont des **règles** pratiques qui permettent de dire si un **nombre** donné, en effectuant des **opérations** simples sur les **chiffres** qui constituent sa **représentation décimale** mais sans effectuer la **division**.

Les critères de divisibilité se démontrent en utilisant la notion de convergence.

Tableau. Principaux critères de divisibilité.

N est divisible :

Par **3**. Si la somme de ses chiffres l'est ;

Par **4**. Si le nombre formé par ses **deux derniers chiffres** l'est ;

Par **5**. Si le dernier chiffre est **0** ou **5** ;

Par **8**. Si le nombre formé par les **trois derniers chiffres** l'est ;

Par **9**. Si la somme de ses chiffres l'est ;

Par **11**. Si la différence entre la somme des chiffres dont la position est paire et celle des chiffres dont la position est impaire est nulle ou divisible par **11** ;

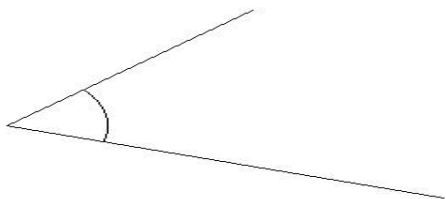
Par 10^k . si les **K** derniers chiffres sont égaux à **0**.

XI- Secteur angulaire :

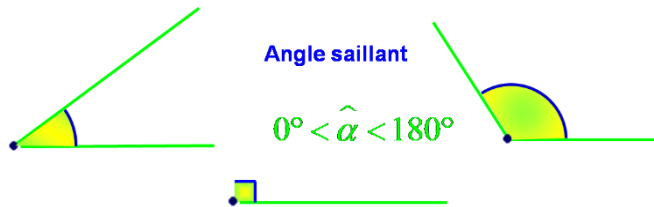
A- Définition :

Un **angle** est la **figure** formée par **deux demi-droites**, **deux segments de droite** ou **une demi-droite** et un segment de droite issus d'un même **point** qui est le **sommet** de l'angle.

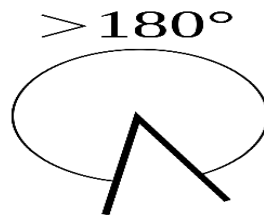
Pour désigner un angle formé par deux demi-droites **AB** et **AC**, on dit **BÂC**, on dit angle **BÂC** en plaçant la lettre du sommet au milieu ou plus simplement l'angle **A**. on écrit **BÂC** ou **Â**.



1- Angle saillant :

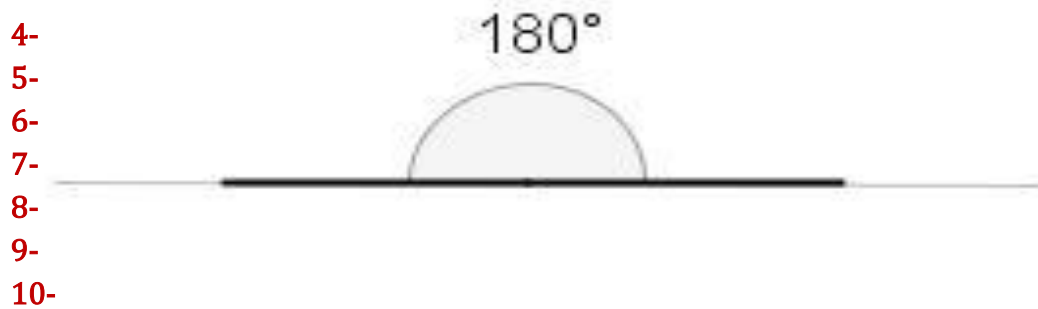


2- Angle rentrant :

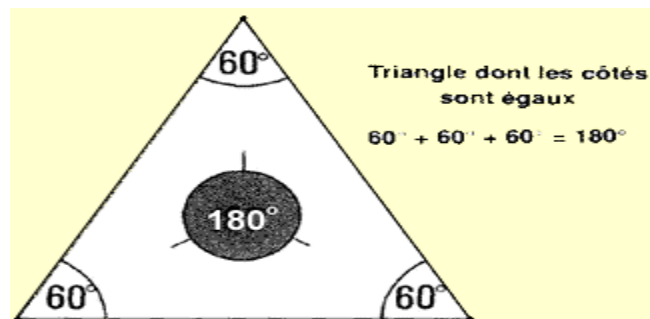


3- Angle plat : On appelle **angle plat**, un angle dont les côtés appartiennent à une même droite.

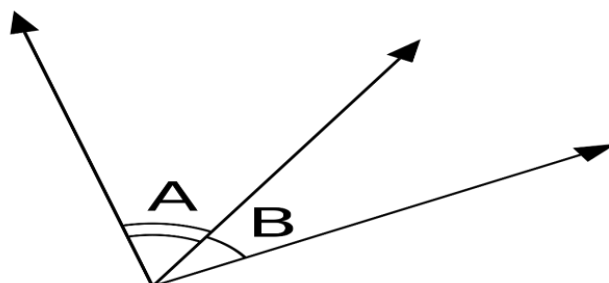
C'est un angle de 180° .



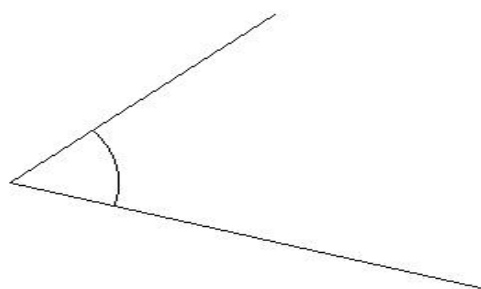
4- **Angles égaux** : Ce sont deux angles superposables.



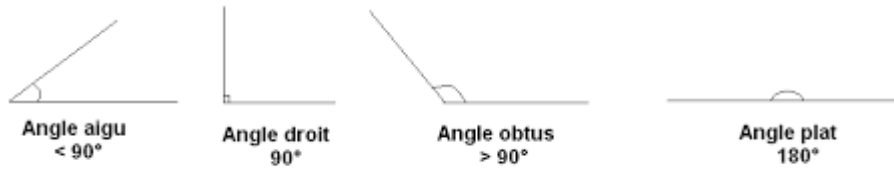
5- **Angles adjacents** : Deux angles sont **adjacents** lorsqu'ils ont le même sommet, un côté commun et qu'ils sont situés de part et d'autre du côté commun.



6- **Angle droit** : C'est la **motrice** d'un angle plat. C'est aussi un angle de 90° .

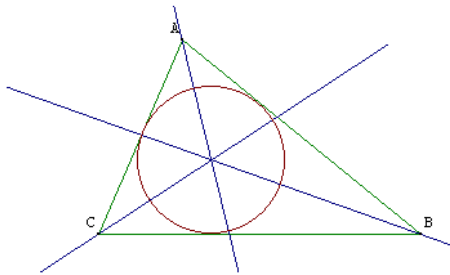


7- Angle aigu et obtus :



- On appelle **angle aigu**, un angle inférieur à l'**angle droit**.
- On appelle **angle obtus**, un angle supérieur à l'angle droit.

8- Bissectrice d'un angle : C'est la demi-droite qui partage cet angle en deux angles opposés



Les 3 bissectrices d'un triangle, et leur intersection, le centre du cercle inscrit.

B- Unités d'angles : Comme unités d'angles, on utilise :

- **Le degré** : ($^\circ$) C'est le **sous multiple** : **minute** ($'$) et la **seconde** ($''$).

$$1^\circ = 60'. 1' = 60''.$$

- **Le grade :** (gr) et ses sous multiples décimaux (**décigrade, centigrade**, etc.).

$$1^\circ = 100 \text{ gr}$$

$$1 \text{ gr} = 10 \text{ dgr}$$

- **Le radian :** $2 \pi \text{ rad} = 360^\circ = 400 \text{ gr}$

- **Les angles complémentaires :**

Deux angles sont **complémentaires** si la somme de leur mesure est un angle droit. **Exemple :** (50° et 40°) ; (30° et 60°).

- **Les angles supplémentaires :**

Deux angles sont dits **supplémentaires** si la somme de leur mesure vaut 180° . **Exemple :** (120° et 60°) ; (110° et 70°) ; (150° et 30°).

XII- Triangle :

1- Définition :

Polygone ayant **trois côtés** et **trois angles**. Il peut être **équilatéral** (si ses côtés sont égaux), **scalène** (si ses **trois** côtés sont inégaux deux à deux), s'il a **un angle droit**, il est dit **rectangle**.

La somme des angles intérieurs d'un triangle est égale à 180° ; c'est pourquoi, dans un triangle, il ne peut y avoir plus d'un angle supérieur ou égal à un angle droit.

Dans un triangle quelconque, il y a **trois hauteurs** (segments de perpendiculaire) allant d'un **sommet** au côté opposé ou à son prolongement), **trois médianes** (segment joignant un sommet au milieu du côté opposé), **trois bissectrices** (segment de la bissectrice d'un angle compris entre le sommet de l'angle et le côté opposé).

Les droites portant ces segments se rencontrent respectivement à l'**orthocentre**, au **barycentre**, et au **centre** du **cercle** inscrit dans le triangle ; de plus, les **médiatrices** des **trois** côtés d'un triangle concourent au centre du **cercle circonscrit** au triangle.

Alors que pour les polygones ayant **quatre** côtés ou plus il n'existe pas toujours un **cercle inscrit** et un cercle circonscrit, pour un triangle, ils existent toujours.

2- Comparaison :

Pour comparer **deux** triangles, on utilise les **critères d'égalité**. **Deux** triangles sont dits égaux, si l'un est l'image de l'autre par une **isométrie**. **Deux** triangles sont dits égaux s'ils ont **deux** côtés égaux ainsi que l'angle compris entre ces **deux** côtés, ou s'ils ont **un** côté égal ainsi que les angles qui lui sont **adjacents**, ou encore s'ils ont leurs **trois** côtés égaux.

Si **deux** triangles ont tous leurs angles égaux, ils ne sont pas nécessairement égaux, mais ils sont semblables et ont leurs côtés proportionnels.

3- Théorèmes :

Nous avons les théorèmes suivants concernant les triangles : au plus grand côté est opposé le plus grand angle, à des côtés égaux sont opposés des angles égaux ; un côté est toujours plus petit que la somme des deux autres et plus grand que leur différence ; la bissectrice divise le côté opposé en parties proportionnelles aux côtés de l'angle ; les côtés sont inversement proportionnels aux hauteurs qui leurs correspondent.

4- Résolution d'un triangle :

a- Définition :

On appelle **résolution d'un triangle**, l'ensemble des opérations permettant de calculer ses **six éléments** (côtés et angles).

Dans un **triangle rectangle**, il existe entre les côtés une relation fondamentale, dite **théorème de Pythagore**, d'emploi fréquent.

Mais le problème de la résolution d'un triangle est résolu de façon complète par la **trigonométrie**. En **géométrie prospective**, on appelle triangle la figure formée par **trois points** non alignés et les **trois droites** qui les rejoignent **deux-à-deux**.

b- Typologie des triangles :

Les triangles isocèles et équilatéraux sont des triangles particuliers qui présentent respectivement deux et trois côtés égaux.

Quelles sont les propriétés de ces figures et comment peut-on les tracer ?

- Triangle isocèle :

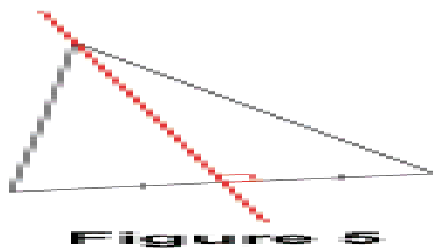
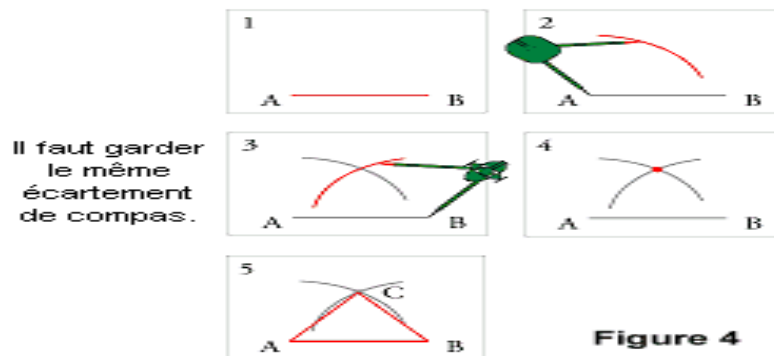
a- Définition :

Un triangle isocèle est **un triangle qui a au moins deux côtés de la même longueur.**

Remarque : si un triangle est équilatéral, alors ce triangle est isocèle (mais il existe des triangles isocèles qui ne sont pas équilatéraux).

b- Propriétés :

Tout triangle isocèle a au moins un axe de symétrie ; réciproquement, si un triangle a un axe de symétrie, alors ce triangle est isocèle.



Dans un triangle isocèle, **deux** angles au moins ont la même mesure ; réciproquement, si dans un triangle **deux** angles au moins ont la même mesure, alors ce triangle est isocèle.

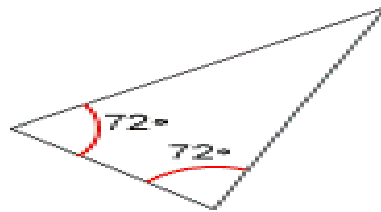


Figure 6

c- Construction :

On veut ici construire un triangle isocèle non équilatéral. La différence avec la construction précédente est que les écartements de compas des étapes 2 et 3 sont égaux, mais ne sont pas égaux à **AB**.

- Triangle équilatéral :

Un triangle équilatéral est **un triangle dont les trois côtés ont la même longueur**. Le triangle 2 de la figure ci-dessous est donc un triangle équilatéral.

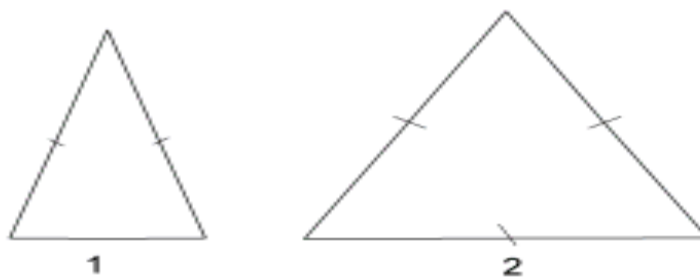


Figure 1

a- Propriétés :

Tout triangle équilatéral a trois axes de symétrie ; réciproquement, si un triangle a **trois** axes de **symétrie**, alors ce triangle est équilatéral.

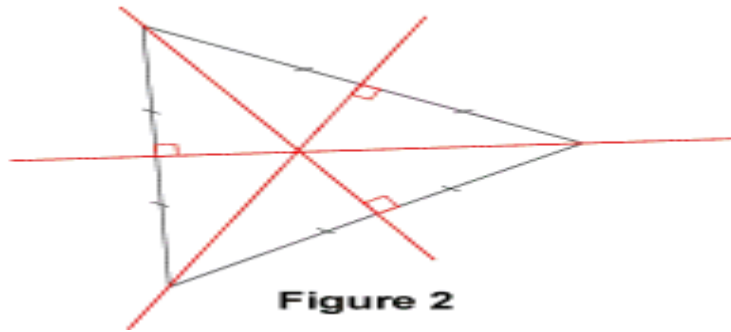


Figure 2

Dans un triangle équilatéral, chaque angle mesure 60° ; réciproquement, si dans un triangle chaque angle mesure 60° , alors ce triangle est équilatéral.

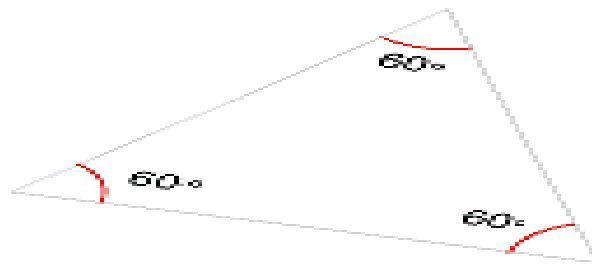


Figure 3

b- Construction :

On veut construire un triangle équilatéral avec la règle et le compas. La série de figures ci-dessous montre les étapes de la construction ; l'écartement du **compas** représente la longueur du côté.

XIII- Quadrilatères :

1- Définition :

Un **quadrilatère** est un **polygone** à **quatre côtés**. **Deux** côtés sont dits consécutifs s'ils concourent en **un** même **sommet**. Deux côtés non consécutifs sont dits opposés. Les **droites** joignant **deux** sommets opposés sont les **diagonales**. La somme des **angles** intérieurs d'un quadrilatère vaut 360° .

2- Typologie :

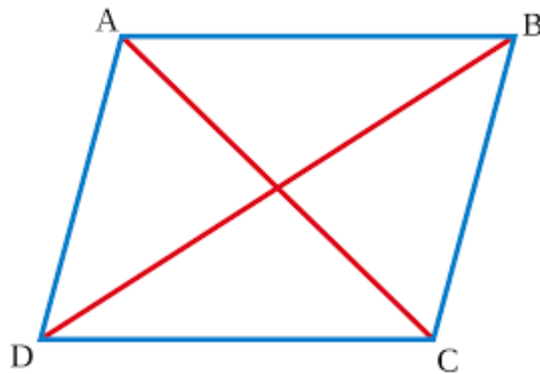
Un quadrilatère dont les côtés opposés sont **deux à deux** parallèles est un **parallélogramme**. S'il n'y a que **deux** côtés parallèles, le parallélogramme est un **trapèze**. Un quadrilatère peut être inscrit dans un **cercle** si et seulement si ses angles opposés sont supplémentaires.

Un quadrilatère peut être circonscrit à un cercle si les sommes des **longueurs** de **deux** côtés opposés sont égales.

a- Rectangle :

Parallélogramme ayant tous ses angles égaux (donc droits). Les **rectangles** et les **carrés** sont des quadrilatères particuliers.

Les diagonales du rectangle sont égales ; si **a** et **b** sont les longueurs de ses côtés, la longueur de la diagonale est : $\sqrt{a^2 + b^2}$.



Un quadrilatère étant donné, quelle(s) propriété(s) suffit-il de connaître pour pouvoir affirmer qu'il s'agit d'un rectangle ou d'un carré ?

Exemple 1 : Un rectangle est un quadrilatère qui a **quatre** angles droits.

Si un quadrilatère est un parallélogramme et a **un** angle droit au moins, alors ce quadrilatère est un rectangle. Autrement dit, les **quatre** angles du quadrilatère considéré sont droits.

Exemple 2 : sur la **figure 1**, $AB = CD = 3 \text{ cm}$ et $BC = AD = 2 \text{ cm}$, donc le quadrilatère **ABCD** est un parallélogramme puisque ses côtés opposés ont **deux à deux** la même longueur.

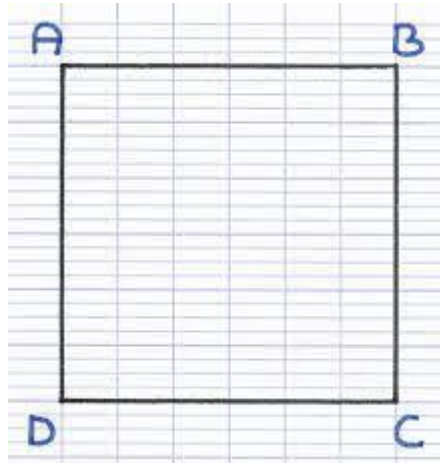
De plus, l'angle \hat{A} est droit ; on peut alors affirmer que **ABCD** est un rectangle.

Si un quadrilatère a **trois** angles droits, alors c'est un rectangle. Autrement dit, le quadrilatère considéré a nécessairement **quatre** angles droits.

Si les diagonales d'un quadrilatère ont le même milieu et la même longueur, alors ce quadrilatère est un rectangle.

b- Carré :

Polygone régulier ayant **quatre** côtés. Il résulte de cette définition qu'un carré a ses angles et ses côtés égaux.



Exemple 1 : Démontrer qu'un quadrilatère est un carré.

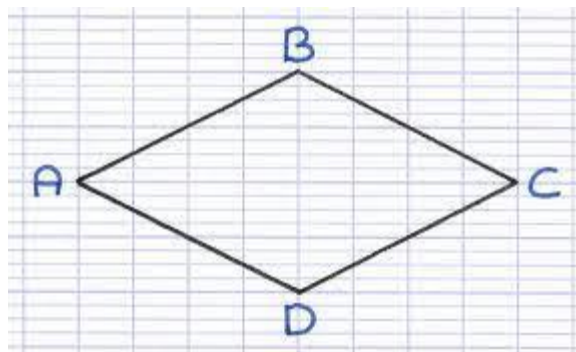
On peut commencer par démontrer que le quadrilatère est un rectangle ou un losange.

Si un rectangle a **deux** côtés consécutifs de même longueur, alors c'est un carré.

Exemple : sur la **figure 4**, le quadrilatère **ABCD** est un rectangle puisqu'il a **trois** angles droits ; de plus, $AB = BC = 3 \text{ cm}$; **ABCD** est donc un carré. Si un rectangle a ses diagonales perpendiculaires, alors c'est un carré.

c- Losange :

Parallélogramme ayant tous ses côtés égaux. Les diagonales sont les **bissectrices** des angles du losange et sont perpendiculaires entre elles.



Un quadrilatère étant donné, quelle(s) propriété(s) suffit-il de connaître pour pouvoir affirmer qu'il s'agit d'un losange ?

Un losange est un quadrilatère dont les quatre côtés ont la même longueur.

Si un losange a un angle droit au moins, alors c'est un carré.

Remarque : si un parallélogramme a deux côtés consécutifs de même longueur, alors c'est un losange (puisque l'on sait que les côtés opposés d'un parallélogramme ont deux à deux la même longueur).

Si les diagonales d'un quadrilatère ont le même milieu et sont perpendiculaires, alors ce quadrilatère est un losange.

si un quadrilatère admet les supports de ses diagonales comme axes de symétrie, alors c'est un losange ;
si les supports des diagonales d'un quadrilatère sont les bissectrices de ses angles, alors ce quadrilatère est un losange ;

si un parallélogramme a des diagonales perpendiculaires, alors c'est un losange.

XIV- Soustraction dans Z :

Opération inverse de l'addition.

Etant donné les nombres a et b , soustraire b de a c'est déterminer le nombre c (différence entre a et b) tel que $a = b + c$.

On écrit $c = a - b$ (a moins b).

Soit a et b deux nombres positifs. Le carré $ABCD$ représenté sur la figure 1 a pour côté $a + b$. À l'intérieur, sont construits deux autres carrés de côtés respectifs a et b , et deux rectangles de mêmes dimensions a et b .

L'aire de $ABCD$ peut se calculer par deux méthodes différentes :

Première méthode : c'est l'aire d'un carré de côté $a + b$, soit $(a + b)^2$.

Seconde méthode : c'est aussi l'aire du carré de côté a , plus les aires des deux rectangles, plus l'aire du carré de côté b , soit $a^2 + ab + ab + b^2$.

De ces deux calculs, on déduit l'égalité : $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. C'est une identité remarquable.

1- Les Trois identités remarquables :

- Deux identités semblables :

L'égalité écrite en introduction reste vraie quels que soient les signes des nombres a et b . On a ainsi, pour tous nombres a et b :

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 ;$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

Remarques :

à gauche du signe « = » figure la forme factorisée de l'identité ; à sa droite, on trouve la forme développée ; les expressions développées ne diffèrent que par le signe du terme $2ab$, appelé « **double-produit** », ce qui permet de les retenir facilement ;

pour retrouver la deuxième identité à partir de la première, on peut écrire $(a - b)^2 = [a + (-b)]^2$, donc $(a - b)^2 = a^2 + 2a(-b) + (-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.

- Une autre identité :

Soit a et b deux nombres positifs. On a ôté d'un grand carré de côté a un petit carré de côté b .

Calculons l'aire de la surface restante jaune par deux méthodes.

Première méthode : c'est la différence entre l'aire du grand carré et l'aire du petit carré, soit $a^2 - b^2$.

Seconde méthode : on fait un découpage de la surface restante, puis on recompose les morceaux. On obtient un rectangle dont les dimensions sont $a + b$ et $a - b$. Son aire est égale à $(a + b)(a - b)$.

On obtient ainsi : $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$.

Cette égalité est vraie quels que soient les signes des nombres a et b .

2- Applications :

Soit x un nombre. On veut développer les expressions suivantes : $(2x + 3)^2$; $(3x - 4)^2$ et $(5x + 2)(5x - 2)$.

$$(2x + 3)^2 = (2x)^2 + 2 \times 2x \times 3 + 3^2 = 4x^2 + 12x + 9$$

$$(3x - 4)^2 = (3x)^2 - 2 \times 3x \times 4 + 4^2 = 9x^2 - 24x + 16$$

$$(5x + 2)(5x - 2) = (5x)^2 - 2^2 = 25x^2 - 4$$

Exemple 1 :

On veut factoriser les expressions : $9x^2 - 12x + 4$; $81 - 9x^2$ et $16x^2 + 24x + 9$

$$9x^2 - 12x + 4 = (3x)^2 - 2 \times 3x \times 2 + 2^2 = (3x - 2)^2$$

$$81 - 9x^2 = 9^2 - (3x)^2 = (9 + 3x)(9 - 3x)$$

$$16x^2 + 24x + 9 = (4x)^2 + 2 \times 4x \times 3 + 3^2 = (4x + 3)^2$$

Exemple 2 : on veut factoriser l' $10^2 - (5x + 3)^2$.

On reconnaît ici une expression de la forme $a^2 - b^2$, où le rôle de **a** est joué par la parenthèse $(2x + 1)$ et celui de **b** par la parenthèse $(5x + 3)$.

$$\text{On a donc } (2x + 1)^2 - (5x + 3)^2 = [(2x + 1) + (5x + 3)][(2x + 1) - (5x + 3)]$$

$$\text{On termine en réduisant chaque crochet : } (2x + 1 + 5x + 3)(2x + 1 - 5x - 3) = (7x + 4)(-3x - 2)$$

On veut calculer mentalement : 53^2 ; 79^2 et 41×39 .

On transforme chaque écriture pour pouvoir utiliser une identité remarquable. Les étapes détaillées ci-dessous sont à effectuer mentalement dans la pratique :

$$53^2 = (50 + 3)^2 = 50^2 + 2 \times 50 \times 3 + 3^2 = 2\,500 + 300 + 9 = 2\,809$$

$$79^2 = (80 - 1)^2 = 80^2 - 2 \times 80 \times 1 + 1^2 = 6\,400 - 160 + 1 = 6\,241$$

$$41 \times 39 = (40 + 1)(40 - 1) = 40^2 - 1^2 = 1\,600 - 1 = 1\,599$$

XV- Les Polygones :

1- Définition :

Ligne polygonale fermée ou en partie bornée du **plan**, limitée par une ligne polygonale simple fermée ; les sommets et les côtés de la ligne polygonale sont dits sommets et côtés du polygone.

2- Typologie :

Qu'est-ce qu'un polygone régulier ?

La réponse spontanée est : un polygone dont tous les côtés ont la même longueur ; cependant il existe des polygones non réguliers dont tous les côtés sont de la même longueur.

Quelle est donc la définition d'un polygone régulier ?

Et quelles propriétés utilise-t-on pour construire un pentagone, un hexagone ou un octogone régulier ?

Un **polygone régulier** est un polygone dont tous les côtés ont la même longueur **et** dont tous les angles ont la même mesure.

On dit qu'un polygone est **inscriptible** s'il existe un **cercle** passant par tous ses sommets, **circonscriptible** s'il existe un cercle tangent à tous ses côtés.

On appelle **apothème** d'un polygone circonscriptible le **rayon** du cercle tangent à tous ses côtés. Un polygone **convexe** est dit régulier si tous ses côtés sont égaux ; il est toujours inscriptible et circonscriptible, et les **deux** cercles sont concentriques.

En **géométrie projective**, on appelle **polygone plan complet** la figure formée par **n points** (sommets) d'un plan tels qu'il n'existe pas **trois** points sur la même droite, et par $n(n-1)/2$ droites qui les joignent **deux-à-deux** de toutes les façons possibles.

On parle de **polygone plan simple** quand les sommets sont dans un ordre déterminé et quand on ne considère que les **n droites (côtés)** qui joignent le **premier** sommet au **second**, le **second** au **troisième**, ..., le **dernier** au **premier**.

Cinq polygones réguliers sont représentés sur la figure 1.

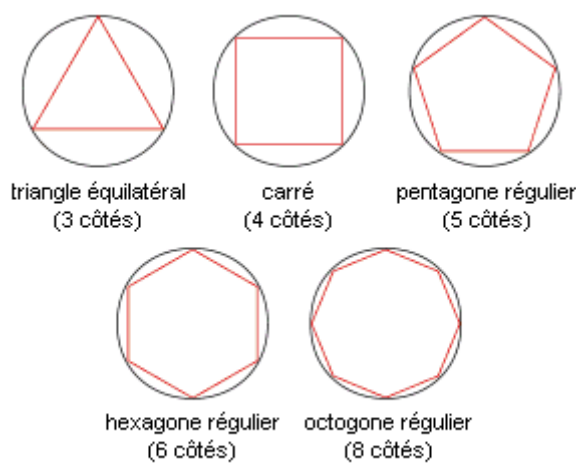


Figure 1

Pour tout polygone régulier, il existe un cercle passant par tous ses sommets appelé **cercle circonscrit** au polygone. Le centre de ce cercle est appelé centre du polygone.

Exemple : Construction d'un pentagone à partir d'un cercle circonscrit

Propriété : soit un polygone régulier de centre O . Tous les angles au centre définis par **deux** rayons du cercle circonscrit joignant O à **deux** sommets consécutifs du polygone ont la même mesure. Si le

polygone a n côtés, cette mesure, exprimée en degrés, est égale à $\frac{360^\circ}{n}$.

Exemple : le pentagone a 5 côtés, la mesure de chaque angle au centre est donc : $\frac{360^\circ}{5} = 72^\circ$.

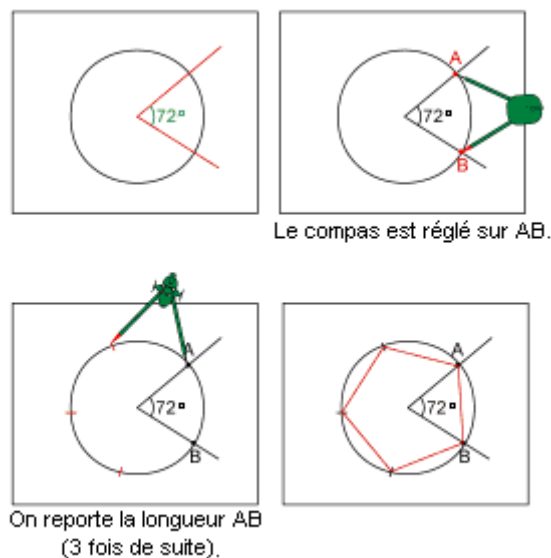


Figure 2

3- Construction :

Propriété : A, B et C étant **trois** sommets consécutifs d'un polygone de centre O , l'angle \widehat{ABC} du polygone et l'angle au centre \widehat{AOB} sont supplémentaires. De plus, la demi-droite $[BO]$ est la bissectrice de l'angle \widehat{ABC} .

Exemple 1 : construisons un **octogone** régulier dont un côté $[AB]$ est donné.

L'octogone a 8 côtés, la mesure de chaque angle au centre est donc : $\frac{360^\circ}{8} = 45^\circ$.

D'après la propriété ci-dessus, chaque angle de l'octogone mesure donc $180 - 45 = 135^\circ$.

On en déduit que chaque demi-angle au sommet mesure $\frac{135^\circ}{2} = 67,5^\circ$.

À partir du côté $[AB]$, on va construire un triangle isocèle ABO tel que $\widehat{OAB} = \widehat{OBA} = 67,5^\circ$.

Le point O obtenu est le centre de l'octogone.

La **figure 3** montre les étapes de la construction de l'octogone.

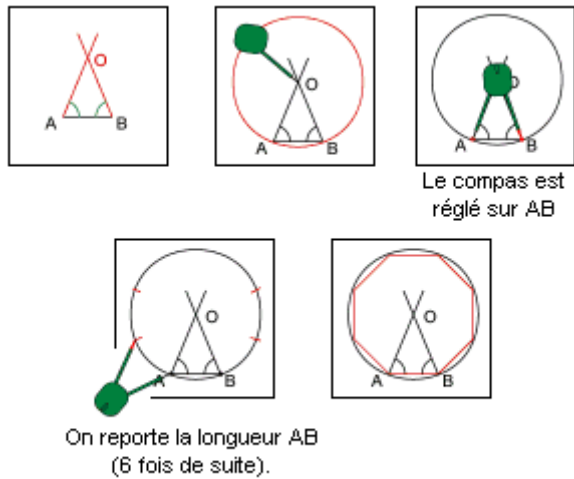


Figure 3

Remarque : on aurait aussi pu construire successivement les côtés de l'octogone sans tracer le cercle puisqu'on sait que chaque angle de l'octogone mesure 135° , mais cette construction est plus longue que la précédente.

Exemple 2 : Construction d'un **hexagone** régulier au compas

L'hexagone ayant 6 côtés, chaque angle au centre mesure $\frac{360^\circ}{6} = 60^\circ$.

Chaque angle de l'hexagone mesure donc $180 - 60 = 120^\circ$.

équilatéral, ce qui justifie la construction d'un hexagone régulier à partir de son cercle circonscrit : on reporte **6 fois** le rayon sur le cercle.

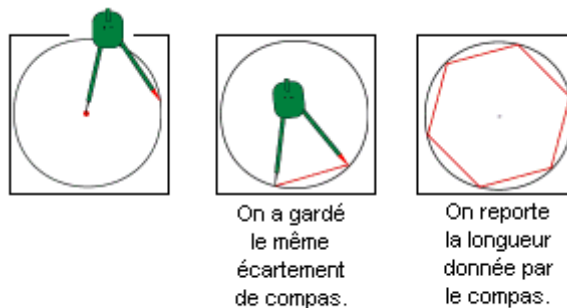


Figure 4

XVI- Multiplication dans Z :

Factoriser une expression littérale consiste à transformer une somme algébrique en produit.

Par exemple, quand on écrit : $ka + kb = k(a + b)$ ou $ka - kb = k(a - b)$, on a factorisé les expressions $ka + kb$ et $ka - kb$.

Dans les deux cas, on dit qu'on a mis **k en facteur**. Le nombre **k** est appelé un **facteur commun**.

Ce facteur commun peut être un nombre, une lettre, le produit d'un nombre par une lettre ou une expression entre parenthèses.

Un facteur commun peut être apparent ou caché. S'il est caché, il faudra le faire apparaître.

$5x - 5a + 5b = 5(x - a + b)$; le facteur commun est 5.

$x^2 - 3x = x(x - 3)$; le facteur commun est x .

$(x + 2)(4x - 5) + (x + 2)(5x + 1) = (x + 2)[(4x - 5) + (5x + 1)]$; le facteur commun est $(x + 2)$.

On peut réduire l'expression trouvée et écrire $(x + 2)(9x - 4)$.

$(3x - 4)^2 - (3x - 4)(2x + 7) = (3x - 4)[(3x - 4) - (2x + 7)]$; le facteur commun est $(3x - 4)$.

On peut réduire l'expression trouvée et écrire $(3x - 4)(x - 11)$.

$$A = 10a - 8b = 2(5a - 4b)$$

$$B = (2x + 3)(4x - 3) - (4x + 6)(7x + 8)$$

$B = (2x + 3)(4x - 3) - 2(2x + 3)(7x + 8)$; on a « fait apparaître » le facteur commun $(2x + 3)$.

$B = (2x + 3)[(4x - 3) - 2(7x + 8)]$; on peut réduire l'expression trouvée et écrire :

$$B = (2x + 3)(4x - 3 - 14x - 16) = (2x + 3)(-10x - 19)$$

Remarque :

On peut aussi factoriser des expressions en utilisant les identités remarquables.

Soit x un nombre.

Exemple 1 :

On veut factoriser les expressions : $9x^2 - 12x + 4$; $81 - 9x^2$ et $16x^2 + 24x + 9$

$$9x^2 - 12x + 4 = (3x)^2 - 2 \times 3x \times 2 + 2^2 = (3x - 2)^2$$

$$81 - 9x^2 = 9^2 - (3x)^2 = (9 + 3x)(9 - 3x)$$

$$16x^2 + 24x + 9 = (4x)^2 + 2 \times 4x \times 3 + 3^2 = (4x + 3)^2$$

Exemple 2 : on veut factoriser $10^2 - (5x + 3)^2$.

On reconnaît ici une expression de la forme $a^2 - b^2$, où le rôle de a est joué par la parenthèse $(2x + 1)$ et celui de b par la parenthèse $(5x + 3)$.

On a donc $(2x + 1)^2 - (5x + 3)^2 = [(2x + 1) + (5x + 3)][(2x + 1) - (5x + 3)]$

On termine en réduisant chaque crochet : $(2x + 1 + 5x + 3)(2x + 1 - 5x - 3) = (7x + 4)(-3x - 2)$

On veut calculer mentalement : 53^2 ; 79^2 et 41×39 .

On transforme chaque écriture pour pouvoir utiliser une identité remarquable. Les étapes détaillées ci-dessous sont à effectuer mentalement dans la pratique :

$$53^2 = (50 + 3)^2 = 50^2 + 2 \times 50 \times 3 + 3^2 = 2\,500 + 300 + 9 = 2\,809$$

$$79^2 = (80 - 1)^2 = 80^2 - 2 \times 80 \times 1 + 1^2 = 6\,400 - 160 + 1 = 6\,241$$

$$41 \times 39 = (40 + 1)(40 - 1) = 40^2 - 1^2 = 1\,600 - 1 = 1\,599$$

XVII- Cercle – Disque :

1- Définition :

Ensemble des **points** du **plan** situés à une distance donnée r (**rayon**) d'un point donné (**centre**).

L'équation cartésienne des cercles ayant pour centre le point (a, b) et pour rayon r est :

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2.$$

C'est une conique particulière qui n'a qu'un foyer coïncidant avec le centre, et où tout **diamètre** est un **axe**.

La longueur du cercle est donnée par $2\pi r$.

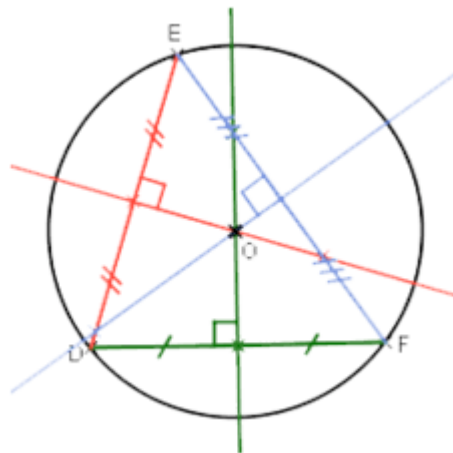
2- Le Cercle circonscrit :

a- Définitions :

Le **cercle circonscrit** à un **triangle** est l'unique **cercle** qui contient les **trois sommets** de ce triangle.

Comment le construire ? Où est son centre ?

La **médiatrice** d'un **segment** est la **droite** qui est **perpendiculaire** à ce segment et qui passe par son **milieu**.



b- Propriété :

soit $[AB]$ un segment,
tout point de la médiatrice de $[AB]$ est équidistant de A et de B ;
les points équidistants de A et de B sont sur la médiatrice de $[AB]$.

c- Construction :

Il suffit de **tracer les médiatrices de deux côtés d'un triangle** ; d'après la propriété des médiatrices du triangle, la médiatrice du **troisième** côté passe nécessairement par ce point. C'est le centre du cercle circonscrit au triangle.

Remarque : les médiatrices d'un triangle sont les médiatrices des côtés de ce triangle. Un triangle a donc **trois** médiatrices.

Les trois médiatrices d'un triangle sont **concurrentes en un point qui est équidistant des trois sommets**.
En effet, soit ABC un triangle et soit O le point d'intersection des médiatrices des côtés $[AB]$ et $[BC]$.

D'après la propriété de la médiatrice, O est équidistant de A et de B , et O est équidistant de B et de C . Donc O est équidistant de A et de C , et O est sur la médiatrice de $[AC]$.

On en déduit que les **trois** médiatrices sont concurrentes en O . De plus, nous avons vu que O est équidistant de

A, B et C.

D'après la propriété précédente, le point de concours **O** des **trois** médiatrices d'un triangle **ABC** est équidistant des **trois** sommets du triangle. Le point **O** est donc **le centre d'un cercle qui passe par les trois sommets de ABC**.

Ce cercle s'appelle le cercle circonscrit au triangle **ABC**.

Remarque : il n'y a qu'un seul point équidistant de **A, B** et **C** puisque les **trois** médiatrices sont concourantes ; il n'y a donc qu'un seul cercle passant par les **trois** sommets d'un triangle **ABC**.

XVIII- Ordre dans Z :

1- Comparaison des nombres décimaux :

- Les deux nombres sont de signes différents :

Tout nombre positif est plus grand que tout nombre négatif.

Exemple : $-19,3 < 3,49$.

- Les deux nombres sont positifs :

Premier cas : si les **deux** nombres ont des parties entières différentes, ils sont rangés dans le même ordre que leurs parties entières.

Exemple : on veut comparer **13,84** et **13,838**.

Exemple : on veut comparer **3,57** et **2,94**.

$3 > 2$ donc $3,57 > 2,94$.

Deuxième cas :

Si les **deux** nombres ont la même partie entière, on réécrit les parties décimales avec le même nombre de décimales (en complétant éventuellement avec des **0**). Les deux nombres sont alors rangés dans le même ordre que les parties décimales.

On a $13,84 = 13,840$. On compare alors les parties décimales, c'est-à-dire **840 millièmes** et **838 millièmes** : $840 > 838$ donc $13,84 > 13,838$.

- Les deux nombres sont négatifs :

Les **deux** nombres sont rangés dans l'ordre contraire de leurs opposés.

Exemple : on veut comparer $-54,93$ et $-54,947$.

On compare leurs opposés, soit $54,93$ et $54,947$: $54,93 < 54,947$
On a donc : $-54,93 > -54,947$.

2- Comparaison des nombres fractionnaires :

a- Cas particuliers :

Premier cas : si les **deux** nombres n'ont pas le même signe, le nombre positif est plus grand que le nombre négatif.

Exemple : on veut comparer $-\frac{107}{289}$ et $\frac{458}{1993}$.

On a : $\frac{107}{289} < \frac{458}{1993}$.

Deuxième cas : si les **deux** nombres ont le **même** dénominateur positif, alors ils sont rangés dans le même ordre que leurs numérateurs.

Exemple : on veut comparer $-\frac{13}{23}$ et $-\frac{11}{23}$.

Ces deux nombres ont le même dénominateur positif (**23**) et $-13 < -11$.

On a donc : $-\frac{13}{23} > -\frac{11}{23}$.

Troisième cas : si les deux nombres ont le **même numérateur positif**, ils sont rangés dans l'ordre contraire de leurs dénominateurs.

Exemple : on veut comparer $\frac{17}{29}$ et $\frac{17}{23}$.

Ces deux nombres ont le même numérateur positif et $29 > 23$.

On a donc : $\frac{17}{29} < \frac{17}{23}$.

b- Cas général :

Règle :

Pour comparer deux nombres donnés en écriture fractionnaire, on peut les réduire au même dénominateur positif puis comparer les nouveaux numérateurs. Les deux nombres sont alors rangés dans le même ordre que les nouveaux numérateurs.

Exemple 1 : on veut comparer : $-\frac{7}{15}$ et $-\frac{9}{19}$.

On les réduit au même dénominateur positif : $-\frac{7}{15} = \frac{-7 \times 19}{15 \times 19} = \frac{-133}{285}$ et $-\frac{9}{19} = \frac{-9 \times 15}{19 \times 15} = \frac{-135}{285}$.

On compare ensuite les numérateurs : $-133 > -135$.

On a donc : $-\frac{7}{15} > -\frac{9}{19}$.

Exemple 2 : on veut comparer : $-\frac{13}{3}$ et $-\frac{17}{4}$.

On fait en sorte que les deux dénominateurs soient positifs :

$$\frac{13}{-3} = \frac{-13}{3}$$

On réduit les deux fractions au même dénominateur positif :

$$\frac{-13}{3} = \frac{-13 \times 4}{3 \times 4} = \frac{-52}{12} \quad \text{et} \quad \frac{-17}{4} = \frac{-17 \times 3}{4 \times 3} = \frac{-51}{12}$$

On compare ensuite les numérateurs : $-52 < -51$.

On a donc : $\frac{13}{-3} < \frac{-17}{4}$.

Remarque : on aurait pu aussi, à l'aide d'une calculatrice, chercher une valeur approchée de chaque nombre et comparer ces valeurs approchées.

$\frac{13}{-3} \approx -4,33$ et $\frac{-17}{4} \approx -4,25$ or $-4,33 < -4,25$ donc $\frac{13}{-3} < \frac{-17}{4}$.

XIX- Polyèdres :

1- Définition :

Ensemble borné de **points** de l'espace limité par des **polygones (faces)** qui ne sont pas toujours **coplanaires** et qui sont disposés de telle que leurs côtés (**arêtes**) soient communs à **deux** polygones et à deux seulement.

On suppose en général que **deux** faces ne sont jamais coplanaires, qu'elles n'ont en commun que les arêtes, et que tout sommet appartient à **trois** arêtes au moins.

Dans un **polyèdre convexe**, en même temps qu'une arête, on considère le **dièdre** ayant pour faces les plans des polygones dont l'arête est commune.

2- Typologie :

Pour les polyèdres, on peut envisager différents types de classification : la **classification métrique** met en évidence les **polyèdres réguliers**, la **classification affine** les **prismes**, la **classification projective** les **pyramides**, etc.

a- Polyèdre régulier, un si faces polyèdre est dit régulier sont des polygones réguliers égaux

entre eux. Dans l'espace ordinaire, il existe **5** polyèdres réguliers convexes : le **tétraèdre** (qui a pour faces **4 triangles équilatéraux**), l'**hexaèdre** (qui a pour faces **6 carrés**), l'**octaèdre** (qui a pour faces **8 triangles équilatéraux**), le **dodécaèdre** (qui a pour faces **12 pentagones réguliers**), l'**icosaèdre** (qui a pour faces **20 triangles équilatéraux**).

Dans l'espace euclidien de dimension supérieure à **4**, il n'existe que **trois** types de polyèdres réguliers qui rappellent respectivement le tétraèdre, l'hexaèdre et l'octaèdre, tandis que dans l'espace de dimension **4**, à ces **trois** types de polyèdre s'en ajoutent **trois** autres.

b- Polyèdre archimédien, un polyèdre est dit archimédien si toutes ses faces sont des

Polygones réguliers pas forcément égaux : il en existe **15** types.

c- Angle polyèdre ou secteur polyèdre, portion illimitée d'espace limitée par des parties

planes qui sont des secteurs angulaires ayant même sommet. A tout sommet d'un polyèdre, on peut associer un angle polyèdre ayant pour faces les plans des polygones qui passent par ce sommet.

XX- Le Système sexagésimal :

En **1998**, le Brésilien **Ronaldo Da Costa** a parcouru les **42,195 km** du **marathon** en à peine plus de **2 h 6 min** (temps exact : **2 h 6 min 05 s**).

On pourrait aussi dire en environ **2,1 h**.

2 h 6 min et **2,1 h** sont **deux** expressions d'une même durée : la **première** est une expression du **système sexagésimal**, la **seconde**, du **système décimal**.

- **Comment passe-t-on de l'une à l'autre ?**

a- Définition :

Une heure (1 h) est égal à **soixante minutes (60 min)** ; une minute est égal à **soixante secondes (60 s)** :
1 h = 60 min et 1 min = 60 s.

Le système utilisant les **heures**, les **minutes** et les **secondes** est un **système sexagésimal**.

Remarques :

On a : **1 h = 3 600 s (60 × 60 = 3 600)** ;

Sexagésimal signifie que l'on **compte par soixantaines**, de la même façon que l'on **compte par dizaines** dans le **système décimal**.

Ce système sexagésimal est aussi utilisé pour les mesures d'**angles (degrés, minutes et secondes)**. Il était déjà utilisé par les **Babyloniens**.

Exemple 1 :

On veut calculer une **somme de durées**.

$$2 \text{ h } 25 \text{ min } 45 \text{ s} + 3 \text{ h } 57 \text{ min } 30 \text{ s} = 5 \text{ h } 82 \text{ min } 75 \text{ s}.$$

Or : **75 s = 1 min 15 s** donc **5 h 82 min 75 s = 5 h 83 min 15 s.**

Exemple 2 :

Et : **83 min = 1 h 23 min** donc **5 h 83 min 15 s = 6 h 23 min 15 s.**

Finalement : **2 h 25 min 45 s + 3 h 57 min 30 s = 6 h 23 min 15 s.**

On veut calculer une **différence de durées**.

$$4 \text{ h } 12 \text{ min } 7 \text{ s} - 1 \text{ h } 38 \text{ min } 26 \text{ s}.$$

On commence par transformer **4 h 12 min 7 s** pour pouvoir retrancher les **26 s** et les **38 min** :

$$4 \text{ h } 12 \text{ min } 7 \text{ s} = 4 \text{ h } 11 \text{ min } 67 \text{ s} = 3 \text{ h } 71 \text{ min } 67 \text{ s} ;$$

$$\text{alors : } 4 \text{ h } 12 \text{ min } 7 \text{ s} - 1 \text{ h } 38 \text{ min } 26 \text{ s} = 3 \text{ h } 71 \text{ min } 67 \text{ s} - 1 \text{ h } 38 \text{ min } 26 \text{ s} = 2 \text{ h } 33 \text{ min } 41 \text{ s}.$$

Exemple 3 : on veut écrire la durée : **15 243 s en h, min et s.**

On cherche le nombre entier de minutes contenues dans **15 243 s** en effectuant la division euclidienne **15 243 ÷ 60**.

On trouve : **15 243 = 60 × 254 + 3** et donc : **15 243 s = 254 min 3 s.**

On cherche le nombre entier d'heures contenues dans 254 min en effectuant la division euclidienne $254 \div 60$.
On trouve : $254 = 60 \times 4 + 14$ et donc : $254 \text{ min} = 4 \text{ h } 14 \text{ min}$.

Finalement : $15\,243 \text{ s} = 4 \text{ h } 14 \text{ min } 3 \text{ s}$.

XXI- Le Système décimal :

Passer du système sexagésimal au système décimal on a :

$60 \text{ min} = 1 \text{ h}$, donc $3\,600 \text{ s}$;

$3\,600 \text{ s} = 1 \text{ h}$, donc 60 min ;

$60 \text{ s} = 1 \text{ min}$, donc 60 s .

Exemple 1:

On veut convertir 2 h 6 min dans le système décimal :

On a, donc $(6 \div 60 = 0,1)$.

Par conséquent, $2 \text{ h } 6 \text{ min} = 2 \text{ h} + 0,1 \text{ h} = 2,1 \text{ h}$.

Exemple 2 :

On veut convertir 3 h 55 min 21 s dans le système décimal :

$3 \text{ h } 55 \text{ min } 21 \text{ s} = 3 \times 3\,600 \text{ s} + 55 \times 60 \text{ s} + 21 \text{ s}$;

$3 \text{ h } 55 \text{ min } 21 \text{ s} = 10\,800 \text{ s} + 3\,300 \text{ s} + 21 \text{ s} = 14\,121 \text{ s}$.

Donc : $3 \text{ h } 55 \text{ min } 21 \text{ s} = 3,922\,5 \text{ h}$.

Remarque :

Dans ce type de conversion, les divisions ne tombent pas toujours juste comme dans les exemples ci-dessus.
C'est le cas de 20 min qui est égal à $3\,600 \text{ s}$; on peut écrire : $20 \text{ min} = 0,33 \text{ h}$.

Exemple 3 :

On veut convertir 3,4 h dans le système sexagésimal :

$$3,4 \text{ h} = 3 \text{ h} + 0,4 \text{ h} = 3 \text{ h} + 0,4 \times 60 \text{ min} = 3 \text{ h} + 24 \text{ min}.$$

Donc : 3,4 h = 3 h 24 min.

Exemple 4 :

On veut convertir 1,528 h dans le système sexagésimal :

$$1,528 \text{ h} = 1 \text{ h} + 0,528 \text{ h} ;$$

$$1,528 \text{ h} = 1 \text{ h} + 0,528 \times 60 \text{ min} = 1 \text{ h} + 31,68 \text{ min}.$$

$$31,68 \text{ min} = 31 \text{ min} + 0,68 \text{ min} ;$$

$$31,68 \text{ min} = 31 \text{ min} + 0,68 \times 60 \text{ s} = 31 \text{ min} + 40,8 \text{ s}.$$

Donc : 1,528 h = 1 h 31 min 40,8 s.

Remarque :

On garde en général le système décimal pour les secondes : (40 secondes et 8 dixièmes, comme c'est l'usage en sport, par exemple).

